Sobre la clasificación de ciertas categorías modulares íntegras

Julia Yael Plavnik [1]

Basado en un trabajo conjunto con P. Bruillard, C. Galindo, S.-M. Hong, Y. Kashina, D. Naidu, S. Natale y E. Rowell

[1]Universidad de Buenos Aires
IMAS - CONICET

VII Encuentro Nacional de Álgebra
La Falda - 04 de Agosto de 2014

Categorías de fusión

Sea **k** un cuerpo algebráicamente cerrado de característica cero.

Una categoría $\mathcal{C}$ es una categoría de ***fusión*** sobre **k** si:

- es una categoría abeliana **k**-lineal: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un **k**-espacio vectorial y la composición de morfismos es bilineal,
- es una categoría monoidal: $(\mathcal{C}, \otimes, \mathrm{a}, \mathbf{1}, \mathrm{l}, \mathrm{r})$,
- es rígida: para todo $X \in \mathcal{C}$ existen duales a izquierda y a derecha,
- es semisimple: los objetos son sumas directas finitas de objetos simples,
- $\mathcal{C}$ tiene una cantidad finita de clases de isomorfismo de objetos simples,
- los espacios de morfismos son de dimensión finita,
- $\mathbf{1}$ es un objeto simple de $\mathcal{C}$.

Categorías de fusión

Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo algebráicamente cerrado de característica cero.
Una categoría $\mathcal{C}$ es una categoría de ***fusión*** sobre $\mathbf{k}$ si:

- es una categoría abeliana $\mathbf{k}$-lineal: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un $\mathbf{k}$-espacio vectorial y la composición de morfismos es bilineal,
- es una categoría monoidal: $(\mathcal{C}, \otimes, \mathrm{a}, \mathbf{1}, \mathrm{l}, \mathrm{r})$,
- es rígida: para todo $X \in \mathcal{C}$ existen duales a izquierda y a derecha,
- es semisimple: los objetos son sumas directas finitas de objetos simples,
- $\mathcal{C}$ tiene una cantidad finita de clases de isomorfismo de objetos simples,
- los espacios de morfismos son de dimensión finita,
- $\mathbf{1}$ es un objeto simple de $\mathcal{C}$.

Categorías de fusión

Sea **k** un cuerpo algebráicamente cerrado de característica cero.
Una categoría $\mathcal{C}$ es una categoría de ***fusión*** sobre **k** si:

- es una categoría abeliana **k**-lineal: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un **k**-espacio vectorial y la composición de morfismos es bilineal,
- es una categoría monoidal: $(\mathcal{C}, \otimes, \mathrm{a}, \mathbf{1}, \mathrm{l}, \mathrm{r})$,
- es rígida: para todo $X \in \mathcal{C}$ existen duales a izquierda y a derecha,
- es semisimple: los objetos son sumas directas finitas de objetos simples,
- $\mathcal{C}$ tiene una cantidad finita de clases de isomorfismo de objetos simples,
- los espacios de morfismos son de dimensión finita,
- $\mathbf{1}$ es un objeto simple de $\mathcal{C}$.

Categorías de fusión

Sea **k** un cuerpo algebráicamente cerrado de característica cero.
Una categoría $\mathcal{C}$ es una categoría de ***fusión*** sobre **k** si:

- es una categoría abeliana **k**-lineal: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un **k**-espacio vectorial y la composición de morfismos es bilineal,
- es una categoría monoidal: $(\mathcal{C}, \otimes, \mathrm{a}, \mathbf{1}, \mathrm{l}, \mathrm{r})$,
- es rígida: para todo $X \in \mathcal{C}$ existen duales a izquierda y a derecha,
- es semisimple: los objetos son sumas directas finitas de objetos simples,
- $\mathcal{C}$ tiene una cantidad finita de clases de isomorfismo de objetos simples,
- los espacios de morfismos son de dimensión finita,
- $\mathbf{1}$ es un objeto simple de $\mathcal{C}$.

Categorías de fusión

Sea **k** un cuerpo algebráicamente cerrado de característica cero.
Una categoría $\mathcal{C}$ es una categoría de ***fusión*** sobre **k** si:

- es una categoría abeliana **k**-lineal: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un **k**-espacio vectorial y la composición de morfismos es bilineal,
- es una categoría monoidal: $(\mathcal{C}, \otimes, \mathrm{a}, \mathbf{1}, \mathrm{l}, \mathrm{r})$,
- es rígida: para todo $X \in \mathcal{C}$ existen duales a izquierda y a derecha,
- es semisimple: los objetos son sumas directas finitas de objetos simples,
- $\mathcal{C}$ tiene una cantidad finita de clases de isomorfismo de objetos simples,
- los espacios de morfismos son de dimensión finita,
- $\mathbf{1}$ es un objeto simple de $\mathcal{C}$.

Categorías de fusión

Sea **k** un cuerpo algebráicamente cerrado de característica cero.
Una categoría $\mathcal{C}$ es una categoría de ***fusión*** sobre **k** si:

- es una categoría abeliana **k**-lineal: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un **k**-espacio vectorial y la composición de morfismos es bilineal,
- es una categoría monoidal: $(\mathcal{C}, \otimes, \mathrm{a}, \mathbf{1}, \mathrm{l}, \mathrm{r})$,
- es rígida: para todo $X \in \mathcal{C}$ existen duales a izquierda y a derecha,
- es semisimple: los objetos son sumas directas finitas de objetos simples,
- $\mathcal{C}$ tiene una cantidad finita de clases de isomorfismo de objetos simples,
- los espacios de morfismos son de dimensión finita,
- $\mathbf{1}$ es un objeto simple de $\mathcal{C}$.

Categorías de fusión

Sea **k** un cuerpo algebráicamente cerrado de característica cero.
Una categoría $\mathcal{C}$ es una categoría de ***fusión*** sobre **k** si:

- es una categoría abeliana **k**-lineal: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un **k**-espacio vectorial y la composición de morfismos es bilineal,
- es una categoría monoidal: $(\mathcal{C}, \otimes, \mathrm{a}, \mathbf{1}, \mathrm{l}, \mathrm{r})$,
- es rígida: para todo $X \in \mathcal{C}$ existen duales a izquierda y a derecha,
- es semisimple: los objetos son sumas directas finitas de objetos simples,
- $\mathcal{C}$ tiene una cantidad finita de clases de isomorfismo de objetos simples,
- los espacios de morfismos son de dimensión finita,
- $\mathbf{1}$ es un objeto simple de $\mathcal{C}$.

Categorías de fusión

Sea **k** un cuerpo algebráicamente cerrado de característica cero.

Una categoría $\mathcal{C}$ es una categoría de ***fusión*** sobre **k** si:

- es una categoría abeliana **k**-lineal: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un **k**-espacio vectorial y la composición de morfismos es bilineal,
- es una categoría monoidal: $(\mathcal{C}, \otimes, \mathrm{a}, \mathbf{1}, \mathrm{l}, \mathrm{r})$,
- es rígida: para todo $X \in \mathcal{C}$ existen duales a izquierda y a derecha,
- es semisimple: los objetos son sumas directas finitas de objetos simples,
- $\mathcal{C}$ tiene una cantidad finita de clases de isomorfismo de objetos simples,
- los espacios de morfismos son de dimensión finita,
- $\mathbf{1}$ es un objeto simple de $\mathcal{C}$.

Categorías de fusión

Sea **k** un cuerpo algebráicamente cerrado de característica cero.

Una categoría $\mathcal{C}$ es una categoría de ***fusión*** sobre **k** si:

- es una categoría abeliana **k**-lineal: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un **k**-espacio vectorial y la composición de morfismos es bilineal,
- es una categoría monoidal: $(\mathcal{C}, \otimes, \mathrm{a}, \mathbf{1}, \mathrm{l}, \mathrm{r})$,
- es rígida: para todo $X \in \mathcal{C}$ existen duales a izquierda y a derecha,
- es semisimple: los objetos son sumas directas finitas de objetos simples,
- $\mathcal{C}$ tiene una cantidad finita de clases de isomorfismo de objetos simples,
- los espacios de morfismos son de dimensión finita,
- $\mathbf{1}$ es un objeto simple de $\mathcal{C}$.

Ejemplos

- Sea G un grupo finito. La categoría $\mathrm{Rep}(G)$ de representaciones de dimensión finita de G sobre $\mathbf{k}$ es una categoría de fusión.
- Sea G un grupo finito. La categoría Vec_G^ω de espacios vectoriales G-graduados de dimensión finita sobre $\mathbf{k}$ con asociatividad determinada por un 3-cociclo ω es una categoría de fusión.
- Sea H un álgebra de Hopf semisimple de dimensión finita. La categoría $\mathrm{Rep}\, H$ de representaciones de dimensión finita de H es una categoría de fusión.

Ejemplos

- Sea G un grupo finito. La categoría $\text{Rep}(G)$ de representaciones de dimensión finita de G sobre $\mathbf{k}$ es una categoría de fusión.
- Sea G un grupo finito. La categoría Vec_G^ω de espacios vectoriales G-graduados de dimensión finita sobre $\mathbf{k}$ con asociatividad determinada por un 3-cociclo ω es una categoría de fusión.
- Sea H un álgebra de Hopf semisimple de dimensión finita. La categoría $\text{Rep}\, H$ de representaciones de dimensión finita de H es una categoría de fusión.

Ejemplos

- Sea G un grupo finito. La categoría $\mathrm{Rep}(G)$ de representaciones de dimensión finita de G sobre $\mathbf{k}$ es una categoría de fusión.
- Sea G un grupo finito. La categoría Vec_G^ω de espacios vectoriales G-graduados de dimensión finita sobre $\mathbf{k}$ con asociatividad determinada por un 3-cociclo ω es una categoría de fusión.
- Sea H un álgebra de Hopf semisimple de dimensión finita. La categoría $\mathrm{Rep}\, H$ de representaciones de dimensión finita de H es una categoría de fusión.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión sobre **k**.

- Denotaremos $\mathrm{Irr}(\mathcal{C}) = \{X_0 = \mathbf{1}, X_1, \ldots, X_n\}$ al conjunto de clases de isomorfismo de objetos simples en $\mathcal{C}$.
- Reglas de fusión: $X \otimes Y \simeq \bigoplus_{Z \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} N_{X,Y}^{Z} Z$ $(X, Y \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C}))$ con $N_{X,Y}^{Z} = \dim \mathrm{Hom}(Z, X \otimes Y) \in \mathbb{Z}^{+}$.
- La dimensión de Frobenius-Perron $\mathrm{FPdim}(X) \in \mathbb{R}^{+}$ de $X \in \mathcal{C}$ es el mayor autovalor no-negativo de la matriz $(N_{X,Y}^{Z})_{Y,Z \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})}$(matriz de multiplicación a izquierda por X c.r. a $\otimes$).
- La dimensión de Frobenius-Perron de $\mathcal{C}$ es $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = \sum_{X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} (\mathrm{FPdim}\, X)^{2}$.

Dimensión de Frobenius-Perron

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión sobre **k**.

- Denotaremos Irr($\mathcal{C}$)$= \{X_0 = \mathbf{1}, X_1, \dots, X_n\}$ al conjunto de clases de isomorfismo de objetos simples en $\mathcal{C}$.
- Reglas de fusión: $X \otimes Y \simeq \bigoplus_{Z \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} N_{X,Y}^{Z} Z$ $(X, Y \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C}))$ con $N_{X,Y}^{Z} = \dim \mathrm{Hom}(Z, X \otimes Y) \in \mathbb{Z}^{+}$.
- La dimensión de Frobenius-Perron $\mathrm{FPdim}(X) \in \mathbb{R}^{+}$ de $X \in \mathcal{C}$ es el mayor autovalor no-negativo de la matriz $(N_{X,Y}^{Z})_{Y,Z \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})}$(matriz de multiplicación a izquierda por X c.r. a $\otimes$).
- La dimensión de Frobenius-Perron de $\mathcal{C}$ es $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = \sum_{X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} (\mathrm{FPdim}\, X)^2$.

Dimensión de Frobenius-Perron

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión sobre **k**.

- Denotaremos $\mathrm{Irr}(\mathcal{C}) = \{X_0 = \mathbf{1}, X_1, \ldots, X_n\}$ al conjunto de clases de isomorfismo de objetos simples en $\mathcal{C}$.
- Reglas de fusión: $X \otimes Y \simeq \bigoplus_{Z \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} N_{X,Y}^Z Z$ $(X, Y \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C}))$ con $N_{X,Y}^Z = \dim \mathrm{Hom}(Z, X \otimes Y) \in \mathbb{Z}^+$.
- La dimensión de Frobenius-Perron $\mathrm{FPdim}(X) \in \mathbb{R}^+$ de $X \in \mathcal{C}$ es el mayor autovalor no-negativo de la matriz $(N_{X,Y}^Z)_{Y,Z \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})}$(matriz de multiplicación a izquierda por X c.r. a $\otimes$).
- La dimensión de Frobenius-Perron de $\mathcal{C}$ es $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = \sum_{X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} (\mathrm{FPdim}\, X)^2$.

Dimensión de Frobenius-Perron

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión sobre **k**.

- Denotaremos Irr($\mathcal{C}$)$= \{X_0 = \mathbf{1}, X_1, \ldots, X_n\}$ al conjunto de clases de isomorfismo de objetos simples en $\mathcal{C}$.
- Reglas de fusión: $X \otimes Y \simeq \bigoplus_{Z \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} N_{X,Y}^Z Z$ $(X, Y \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C}))$ con $N_{X,Y}^Z = \dim \mathrm{Hom}(Z, X \otimes Y) \in \mathbb{Z}^+$.
- La dimensión de Frobenius-Perron $\mathrm{FPdim}(X) \in \mathbb{R}^+$ de $X \in \mathcal{C}$ es el mayor autovalor no-negativo de la matriz $(N_{X,Y}^Z)_{Y,Z \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})}$(matriz de multiplicación a izquierda por X c.r. a $\otimes$).
- La dimensión de Frobenius-Perron de $\mathcal{C}$ es $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = \sum_{X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} (\mathrm{FPdim}\, X)^2$.

Dimensión de Frobenius-Perron

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión sobre **k**.

- Denotaremos $\mathrm{Irr}(\mathcal{C}) = \{X_0 = \mathbf{1}, X_1, \ldots, X_n\}$ al conjunto de clases de isomorfismo de objetos simples en $\mathcal{C}$.
- Reglas de fusión: $X \otimes Y \simeq \bigoplus_{Z \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} N_{X,Y}^{Z} Z$ $(X, Y \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C}))$ con $N_{X,Y}^{Z} = \dim \mathrm{Hom}(Z, X \otimes Y) \in \mathbb{Z}^{+}$.
- La dimensión de Frobenius-Perron $\mathrm{FPdim}(X) \in \mathbb{R}^{+}$ de $X \in \mathcal{C}$ es el mayor autovalor no-negativo de la matriz $(N_{X,Y}^{Z})_{Y,Z \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})}$(matriz de multiplicación a izquierda por X c.r. a $\otimes$).
- La dimensión de Frobenius-Perron de $\mathcal{C}$ es $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = \sum_{X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} (\mathrm{FPdim}\, X)^2$.

Dimensión de Frobenius-Perron

- Una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es íntegra si $\text{FPdim}(X) \in \mathbb{Z}^+, \forall X \in \text{Irr}(\mathcal{C})$ ($\Rightarrow \mathcal{C} \simeq \text{Rep}\, H$, H quasi-Hopf semisimple [ENO]).
- Una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es déblimente íntegra si $\text{FPdim}(\mathcal{C}) \in \mathbb{Z}$.

Dimensión de Frobenius-Perron

- Una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es íntegra si $\mathrm{FPdim}(X) \in \mathbb{Z}^{+}, \forall X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$ ($\Rightarrow \mathcal{C} \simeq \mathrm{Rep}\, H$, H quasi-Hopf semisimple [ENO]).
- Una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es déblimente íntegra si $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) \in \mathbb{Z}$.

Categorías de fusión punteadas

- Un objeto $X \in \mathcal{C}$ es invertible si y sólo si $\operatorname{FPdim} X = 1$. El conjunto de objetos invertible $G(\mathcal{C})$ en $\mathcal{C}$ es un grupo c.r. a $\otimes$.
- Una categoría se dice punteada si todos sus objetos simples son invertibles. Si $\mathcal{C}$ es punteada entonces $\mathcal{C} \cong \mathrm{Vec}_G^{\omega}$.
- La subcategoría punteada maximal $\mathcal{C}_{\mathrm{pt}}$ de $\mathcal{C}$ es la subcategoría de fusión generada por $G(\mathcal{C})$.

Categorías de fusión punteadas

- Un objeto $X \in \mathcal{C}$ es invertible si y sólo si $\operatorname{FPdim} X = 1$. El conjunto de objetos invertible $G(\mathcal{C})$ en $\mathcal{C}$ es un grupo c.r. a $\otimes$.
- Una categoría se dice punteada si todos sus objetos simples son invertibles. Si $\mathcal{C}$ es punteada entonces $\mathcal{C} \cong \mathrm{Vec}_G^{\omega}$.
- La subcategoría punteada maximal $\mathcal{C}_{\mathrm{pt}}$ de $\mathcal{C}$ es la subcategoría de fusión generada por $G(\mathcal{C})$.

Categorías de fusión punteadas

- Un objeto $X \in \mathcal{C}$ es invertible si y sólo si $\operatorname{FPdim} X = 1$. El conjunto de objetos invertible $G(\mathcal{C})$ en $\mathcal{C}$ es un grupo c.r. a $\otimes$.
- Una categoría se dice punteada si todos sus objetos simples son invertibles. Si $\mathcal{C}$ es punteada entonces $\mathcal{C} \cong \mathrm{Vec}_G^{\omega}$.
- La subcategoría punteada maximal $\mathcal{C}_{\mathrm{pt}}$ de $\mathcal{C}$ es la subcategoría de fusión generada por $G(\mathcal{C})$.

Categorías de fusión punteadas

- Un objeto $X \in \mathcal{C}$ es invertible si y sólo si $\operatorname{FPdim} X = 1$. El conjunto de objetos invertible $G(\mathcal{C})$ en $\mathcal{C}$ es un grupo c.r. a $\otimes$.
- Una categoría se dice punteada si todos sus objetos simples son invertibles. Si $\mathcal{C}$ es punteada entonces $\mathcal{C} \cong \mathrm{Vec}_G^\omega$.
- La subcategoría punteada maximal $\mathcal{C}_{\mathrm{pt}}$ de $\mathcal{C}$ es la subcategoría de fusión generada por $G(\mathcal{C})$.

Una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es ***trenzada*** si está munida de ismorfismos naturales $\sigma_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$ (trenza) que satisfacen los axiomas de hexágono, i.e. el siguiente diagrama (y otro análogo) conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "a_{X,Y,Z}"] \arrow[d, "\sigma_{X,Y} \otimes \mathrm{id}_Z"'] & X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "\sigma_{X,Y \otimes Z}"] & (Y \otimes Z) \otimes X \arrow[d, "a_{Y,Z,X}"] \\
(Y \otimes X) \otimes Z \arrow[r, "a_{Y,X,Z}"'] & Y \otimes (X \otimes Z) \arrow[r, "\mathrm{id}_Y \otimes \sigma_{X,Z}"'] & Y \otimes (Z \otimes X).
\end{tikzcd}
$$

Categorías de fusión trenzadas

Una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es ***trenzada*** si está munida de ismorfismos naturales $\sigma_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$ (trenza) que satisfacen los axiomas de hexágono, i.e. el siguiente diagrama (y otro análogo) conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}
(X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{a_{X,Y,Z}} & X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{\sigma_{X,Y\otimes Z}} & (Y \otimes Z) \otimes X \\
{\scriptstyle \sigma_{X,Y}\otimes \mathrm{id}_Z}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle a_{Y,Z,X}} \\
(Y \otimes X) \otimes Z & \xrightarrow[a_{Y,X,Z}]{} & Y \otimes (X \otimes Z) & \xrightarrow[\mathrm{id}_Y \otimes \sigma_{X,Z}]{} & Y \otimes (Z \otimes X).
\end{array}$$

Categorías Modulares

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada (con trenza σ) sobre **k**.

- $X, Y \in \mathcal{C}$ se centralizan mútuamente si $\sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y} = \mathrm{id}_{X\otimes Y}$.
- Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$. El centralizador $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$ es la siguiente subcategoría de fusión de $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{D}' = \{X \in \mathcal{C} : \sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y} = \mathrm{id}_{X\otimes Y}, \forall\ Y \in \mathcal{D}\}.$$

- El centro de Müger (o centro simétrico) $Z_2(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ es el centralizador de $\mathcal{C}$: $Z_2(\mathcal{C}) \doteq \mathcal{C}'$.

Definición

La categoría $\mathcal{C}$ es no-degenerada si su centro de Müger es trivial. Una categoría modular es una categoría premodular no-degenerada.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría modular íntegra, entonces $\mathrm{FPdim}(X)^2$ divide a $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C})$, $\forall X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$.

Categorías Modulares

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada (con trenza σ) sobre **k**.

- $X, Y \in \mathcal{C}$ se centralizan mútuamente si $\sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y} = \mathrm{id}_{X\otimes Y}$.
- Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$. El centralizador $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$ es la siguiente subcategoría de fusión de $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{D}' = \{X \in \mathcal{C} : \sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y} = \mathrm{id}_{X\otimes Y}, \forall\ Y \in \mathcal{D}\}.$$

- El centro de Müger (o centro simétrico) $Z_2(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ es el centralizador de $\mathcal{C}$: $Z_2(\mathcal{C}) \doteq \mathcal{C}'$.

Definición

La categoría $\mathcal{C}$ es no-degenerada si su centro de Müger es trivial. Una categoría modular es una categoría premodular no-degenerada.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría modular íntegra, entonces $\mathrm{FPdim}(X)^2$ divide a $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C})$, $\forall X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$.

Categorías Modulares

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada (con trenza σ) sobre **k**.

- $X, Y \in \mathcal{C}$ se centralizan mútuamente si $\sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y} = \mathrm{id}_{X\otimes Y}$.
- Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$. El centralizador $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$ es la siguiente subcategoría de fusión de $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{D}' = \{X \in \mathcal{C} : \sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y} = \mathrm{id}_{X\otimes Y}, \forall\ Y \in \mathcal{D}\}.$$

- El centro de Müger (o centro simétrico) $Z_2(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ es el centralizador de $\mathcal{C}$: $Z_2(\mathcal{C}) \doteq \mathcal{C}'$.

Definición

La categoría $\mathcal{C}$ es no-degenerada si su centro de Müger es trivial. Una categoría modular es una categoría premodular no-degenerada.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría modular íntegra, entonces $\mathrm{FPdim}(X)^2$ divide a $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C})$, $\forall X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$.

Categorías Modulares

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada (con trenza σ) sobre **k**.

- $X, Y \in \mathcal{C}$ se centralizan mútuamente si $\sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y} = \mathrm{id}_{X\otimes Y}$.
- Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$. El centralizador $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$ es la siguiente subcategoría de fusión de $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{D}' = \{X \in \mathcal{C} : \sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y} = \mathrm{id}_{X\otimes Y}, \forall\ Y \in \mathcal{D}\}.$$

- El centro de Müger (o centro simétrico) $Z_2(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ es el centralizador de $\mathcal{C}$: $Z_2(\mathcal{C}) \doteq \mathcal{C}'$.

Definición

La categoría $\mathcal{C}$ es no-degenerada si su centro de Müger es trivial. Una categoría modular es una categoría premodular no-degenerada.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría modular íntegra, entonces $\mathrm{FPdim}(X)^2$ divide a $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C})$, $\forall X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$.

Categorías Modulares

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada (con trenza σ) sobre **k**.

- $X, Y \in \mathcal{C}$ se centralizan mútuamente si $\sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y} = \mathrm{id}_{X\otimes Y}$.
- Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$. El centralizador $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$ es la siguiente subcategoría de fusión de $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{D}' = \{X \in \mathcal{C} : \sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y} = \mathrm{id}_{X\otimes Y}, \forall\ Y \in \mathcal{D}\}.$$

- El centro de Müger (o centro simétrico) $Z_2(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ es el centralizador de $\mathcal{C}$: $Z_2(\mathcal{C}) \doteq \mathcal{C}'$.

Definición

La categoría $\mathcal{C}$ es no-degenerada si su centro de Müger es trivial. Una categoría modular es una categoría premodular no-degenerada.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría modular íntegra, entonces $\mathrm{FPdim}(X)^2$ divide a $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C})$, $\forall X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada (con trenza σ) sobre **k**.

- $X, Y \in \mathcal{C}$ se centralizan mútuamente si $\sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y} = \mathrm{id}_{X\otimes Y}$.
- Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$. El centralizador $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$ es la siguiente subcategoría de fusión de $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{D}' = \{X \in \mathcal{C} : \sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y} = \mathrm{id}_{X\otimes Y}, \forall\ Y \in \mathcal{D}\}.$$

- El centro de Müger (o centro simétrico) $Z_2(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ es el centralizador de $\mathcal{C}$: $Z_2(\mathcal{C}) \doteq \mathcal{C}'$.

Definición

La categoría $\mathcal{C}$ es no-degenerada si su centro de Müger es trivial. Una categoría modular es una categoría premodular no-degenerada.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría modular íntegra, entonces $\mathrm{FPdim}(X)^2$ divide a $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C})$, $\forall X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$.

Categorías de tipo grupo

Una categoría de fusión de ***tipo grupo*** es una categoría de fusión equivalente a la categoría $\mathcal{C}(G, \omega, F, \alpha)$ de $k_\alpha F$-bimódulos en Vec_G^ω, donde:

- G es un grupo finito,
- ω es un 3-cociclo en G,
- $F \subseteq G$ es un subgrupo, y
- $\alpha \in C^2(F, k^\times)$ es una 2-cocadena de F t.q. $\omega|_F = d\alpha$.

Equivalentemente, $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión de tipo grupo si es Morita equivalente a una categoría de fusión punteada Vec_G^ω.

Categorías de tipo grupo

Una categoría de fusión de ***tipo grupo*** es una categoría de fusión equivalente a la categoría $\mathcal{C}(G, \omega, F, \alpha)$ de $k_\alpha F$-bimódulos en Vec_G^ω, donde:

- G es un grupo finito,
- ω es un 3-cociclo en G,
- $F \subseteq G$ es un subgrupo, y
- $\alpha \in C^2(F, k^\times)$ es una 2-cocadena de F t.q. $\omega|_F = d\alpha$.

Equivalentemente, $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión de tipo grupo si es Morita equivalente a una categoría de fusión punteada Vec_G^ω.

Categorías de tipo grupo

Una categoría de fusión de ***tipo grupo*** es una categoría de fusión equivalente a la categoría $\mathcal{C}(G, \omega, F, \alpha)$ de $k_\alpha F$-bimódulos en Vec_G^ω, donde:

- G es un grupo finito,
- ω es un 3-cociclo en G,
- $F \subseteq G$ es un subgrupo, y
- $\alpha \in C^2(F, k^\times)$ es una 2-cocadena de F t.q. $\omega|_F = d\alpha$.

Equivalentemente, $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión de tipo grupo si es Morita equivalente a una categoría de fusión punteada Vec_G^ω.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría modular íntegra.

La categoría $\mathcal{C}$ es de tipo grupo cuando $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C})$ toma alguno de los siguientes valores:

- p^n [DGNO],
- pq [EGO],
- pqr [ENO2],
- pq^2 [NR], o
- pq^3 [NR],

donde p, q y r son primos distintos.

Resultados conocidos

Sea $\mathcal{C}$ una categoría modular íntegra.
La categoría $\mathcal{C}$ es de tipo grupo cuando $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C})$ toma alguno de los siguientes valores:

- p^n [DGNO],
- pq [EGO],
- pqr [ENO2],
- pq^2 [NR], o
- pq^3 [NR],

donde p, q y r son primos distintos.

Resultados conocidos

Sea $\mathcal{C}$ una categoría modular íntegra.
La categoría $\mathcal{C}$ es de tipo grupo cuando $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C})$ toma alguno de los siguientes valores:

- p^n [DGNO],
- pq [EGO],
- pqr [ENO2],
- pq^2 [NR], o
- pq^3 [NR],

donde p, q y r son primos distintos.

$FPdim(\mathcal{C}) = pq^4$ o p^2q^2

Teorema (BGHKNNPR)

Sean $\mathcal{C}$ una categoría de fusión modular íntegra y p y q primos distintos. Entonces:

- *Si $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces $\mathcal{C}$ es de tipo grupo.*
- *Si $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = p^2q^2$ es impar entonces $\mathcal{C}$ es de tipo grupo.*
- *Si $\mathcal{C}$ **no** es de tipo grupo y $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = 4q^2$ entonces $\mathcal{C}$ es conocida: es equivalente a una categoría proveniente del centro de una Tambara-Yamagami o de grupos cuánticos.*

$FPdim(\mathcal{C}) = pq^4$ o p^2q^2

Teorema (BGHKNNPR)

Sean $\mathcal{C}$ una categoría de fusión modular íntegra y p y q primos distintos. Entonces:

- *Si $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces $\mathcal{C}$ es de tipo grupo.*
- *Si $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = p^2q^2$ es impar entonces $\mathcal{C}$ es de tipo grupo.*
- *Si $\mathcal{C}$ **no** es de tipo grupo y $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = 4q^2$ entonces $\mathcal{C}$ es conocida: es equivalente a una categoría proveniente del centro de una Tambara-Yamagami o de grupos cuánticos.*

$FPdim(\mathcal{C}) = pq^4$ o p^2q^2

Teorema (BGHKNNPR)

Sean $\mathcal{C}$ una categoría de fusión modular íntegra y p y q primos distintos. Entonces:

- *Si $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces $\mathcal{C}$ es de tipo grupo.*
- *Si $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = p^2q^2$ es impar entonces $\mathcal{C}$ es de tipo grupo.*
- *Si $\mathcal{C}$ **no** es de tipo grupo y $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = 4q^2$ entonces $\mathcal{C}$ es conocida: es equivalente a una categoría proveniente del centro de una Tambara-Yamagami o de grupos cuánticos.*

$FPdim(\mathcal{C}) = pq^4$ o p^2q^2

Teorema (BGHKNNPR)

Sean $\mathcal{C}$ una categoría de fusión modular íntegra y p y q primos distintos. Entonces:

- *Si $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces $\mathcal{C}$ es de tipo grupo.*
- *Si $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = p^2q^2$ es impar entonces $\mathcal{C}$ es de tipo grupo.*
- *Si $\mathcal{C}$ **no** es de tipo grupo y $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = 4q^2$ entonces $\mathcal{C}$ es conocida: es equivalente a una categoría proveniente del centro de una Tambara-Yamagami o de grupos cuánticos.*

G-graduación

Una G-graduación de una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es una descomposición $\mathcal{C} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{C}_g$ t.q.:

- cada $\mathcal{C}_g$ es una subcategoría abeliana plena, y
- $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ manda $\mathcal{C}_g \times \mathcal{C}_h$ en $\mathcal{C}_{gh}$.

La graduación es fiel si $\mathcal{C}_g \neq 0, \forall g \in G$. En este caso: $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = \mid G \mid \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_e)$ y $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_e) = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_g), \forall g \in G$.

G-graduación

Una G-graduación de una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es una descomposición $\mathcal{C} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{C}_g$ t.q.:

- cada $\mathcal{C}_g$ es una subcategoría abeliana plena, y
- $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ manda $\mathcal{C}_g \times \mathcal{C}_h$ en $\mathcal{C}_{gh}$.

La graduación es fiel si $\mathcal{C}_g \neq 0, \forall g \in G$. En este caso: $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = |G| \, \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_e)$ y $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_e) = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_g), \forall g \in G$.

G-graduación

Una G-graduación de una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es una descomposición $\mathcal{C} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{C}_g$ t.q.:

- cada $\mathcal{C}_g$ es una subcategoría abeliana plena, y
- $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ manda $\mathcal{C}_g \times \mathcal{C}_h$ en $\mathcal{C}_{gh}$.

La graduación es fiel si $\mathcal{C}_g \neq 0, \forall g \in G$. En este caso: $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = \mid G \mid \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_e)$ y $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_e) = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_g), \forall g \in G$.

Una G-graduación de una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es una descomposición $\mathcal{C} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{C}_g$ t.q.:

- cada $\mathcal{C}_g$ es una subcategoría abeliana plena, y
- $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ manda $\mathcal{C}_g \times \mathcal{C}_h$ en $\mathcal{C}_{gh}$.

La graduación es fiel si $\mathcal{C}_g \neq 0$, $\forall g \in G$. En este caso: $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = |G| \, \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_e)$ y $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_e) = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_g), \forall g \in G$.

G-graduación

Una G-graduación de una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es una descomposición $\mathcal{C} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{C}_g$ t.q.:

- cada $\mathcal{C}_g$ es una subcategoría abeliana plena, y
- $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ manda $\mathcal{C}_g \times \mathcal{C}_h$ en $\mathcal{C}_{gh}$.

La graduación es fiel si $\mathcal{C}_g \neq 0$, $\forall g \in G$. En este caso: $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = \mid G \mid \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_e)$ y $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_e) = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_g), \forall g \in G$.

Graduación universal de $\mathcal{C}$

La subcategoría **adjunta** $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$ de $\mathcal{C}$ es la subcategoría de fusión generada por $X \otimes X^*$, con X simple en $\mathcal{C}$.

Gelaki y Nikshych mostraron que para toda categoría de fusión $\mathcal{C}$ existe una graduación fiel canónica:

$$\mathcal{C} = \bigoplus_{g \in U(\mathcal{C})} \mathcal{C}_g,$$

llamada la *graduación universal* de $\mathcal{C}$ y satisface que $\mathcal{C}_e = \mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$.

Teorema (GN)

Sea $\mathcal{C}$ una categoría modular. Entonces su grupo de graduación universal $U(\mathcal{C})$ es isomorfo al grupo de caracteres de $G(\mathcal{C})$, i.e., $U(\mathcal{C}) \simeq \widehat{G(\mathcal{C})}$.

La subcategoría **adjunta** $\mathcal{C}_{\text{ad}}$ de $\mathcal{C}$ es la subcategoría de fusión generada por $X \otimes X^*$, con X simple en $\mathcal{C}$.
Gelaki y Nikshych mostraron que para toda categoría de fusión $\mathcal{C}$ existe una graduación fiel canónica:

$$\mathcal{C} = \bigoplus_{g \in U(\mathcal{C})} \mathcal{C}_g,$$

llamada la *graduación universal* de $\mathcal{C}$ y satisface que $\mathcal{C}_e = \mathcal{C}_{\text{ad}}$.

Teorema (GN)

Sea $\mathcal{C}$ una categoría modular. Entonces su grupo de graduación universal $U(\mathcal{C})$ es isomorfo al grupo de caracteres de $G(\mathcal{C})$, i.e., $U(\mathcal{C}) \simeq \widehat{G(\mathcal{C})}$.

Graduación universal de $\mathcal{C}$

La subcategoría **adjunta** $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$ de $\mathcal{C}$ es la subcategoría de fusión generada por $X \otimes X^*$, con X simple en $\mathcal{C}$.
Gelaki y Nikshych mostraron que para toda categoría de fusión $\mathcal{C}$ existe una graduación fiel canónica:

$$\mathcal{C} = \bigoplus_{g \in U(\mathcal{C})} \mathcal{C}_g,$$

llamada la *graduación universal* de $\mathcal{C}$ y satisface que $\mathcal{C}_e = \mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$.

Teorema (GN)

Sea $\mathcal{C}$ una categoría modular. Entonces su grupo de graduación universal $U(\mathcal{C})$ es isomorfo al grupo de caracteres de $G(\mathcal{C})$, i.e., $U(\mathcal{C}) \simeq \widehat{G(\mathcal{C})}$.

Graduación universal de $\mathcal{C}$

La subcategoría **adjunta** $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$ de $\mathcal{C}$ es la subcategoría de fusión generada por $X \otimes X^*$, con X simple en $\mathcal{C}$.
Gelaki y Nikshych mostraron que para toda categoría de fusión $\mathcal{C}$ existe una graduación fiel canónica:

$$\mathcal{C} = \bigoplus_{g \in U(\mathcal{C})} \mathcal{C}_g,$$

llamada la *graduación universal* de $\mathcal{C}$ y satisface que $\mathcal{C}_e = \mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$.

Teorema (GN)

Sea $\mathcal{C}$ una categoría modular. Entonces su grupo de graduación universal $U(\mathcal{C})$ es isomorfo al grupo de caracteres de $G(\mathcal{C})$, i.e., $U(\mathcal{C}) \simeq \widehat{G(\mathcal{C})}$.

Algunas ideas de la prueba

Si $\mathcal{C}$ es una categoría modular íntegra con $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces $\mathcal{C}$ es de tipo grupo.

Idea de la prueba:

- Sea $X \in \text{Irr}(\mathcal{C})$. Como $\text{FPdim}(X)^2$ divide a $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4 \Rightarrow \text{FPdim}(X) = 1, q$ o q^2.
- Entonces $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C}) = a + bq^2 + cq^4$. Luego $q^2 | a = \text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$.
- Además, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$ divide a $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C})$. Así, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) \in \{q^2, q^3, q^4, pq^2, pq^3, pq^4\}$.
- Caso $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) = q^3$: la graduación universal por $U(\mathcal{C})$ tiene q^3 componentes $\mathcal{C}_g$ y cada una tiene dimensión pq. Luego, $pq = \text{FPdim}(\mathcal{C}_g) = a_g + b_g q^2 + c_g q^4$. Entonces $a_g \neq 0, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Como q divide a $a_g \Rightarrow a_g \geq q$, $\forall g \in U(\mathcal{C})$. Así, $q^3 = a = \sum_{g \in U(\mathcal{C})} a_g \geq q^3 q$. Absurdo.

Algunas ideas de la prueba

Si $\mathcal{C}$ es una categoría modular íntegra con $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces $\mathcal{C}$ es de tipo grupo.

Idea de la prueba:

- Sea $X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$. Como $\mathrm{FPdim}(X)^2$ divide a $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4 \Rightarrow \mathrm{FPdim}(X) = 1, q$ o q^2.
- Entonces $pq^4 = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = a + bq^2 + cq^4$. Luego $q^2 | a = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{\mathrm{pt}})$.
- Además, $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{\mathrm{pt}})$ divide a $pq^4 = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C})$. Así, $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{\mathrm{pt}}) \in \{q^2, q^3, q^4, pq^2, pq^3, pq^4\}$.
- Caso $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{\mathrm{pt}}) = q^3$: la graduación universal por $U(\mathcal{C})$ tiene q^3 componentes $\mathcal{C}_g$ y cada una tiene dimensión pq. Luego, $pq = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_g) = a_g + b_g q^2 + c_g q^4$. Entonces $a_g \neq 0, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Como q divide a $a_g \Rightarrow a_g \geq q$, $\forall g \in U(\mathcal{C})$. Así, $q^3 = a = \sum_{g \in U(\mathcal{C})} a_g \geq q^3 q$. Absurdo.

Algunas ideas de la prueba

Si $\mathcal{C}$ es una categoría modular íntegra con $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces $\mathcal{C}$ es de tipo grupo.

Idea de la prueba:

- Sea $X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$. Como $\mathrm{FPdim}(X)^2$ divide a $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4 \Rightarrow \mathrm{FPdim}(X) = 1, q$ o q^2.
- Entonces $pq^4 = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = a + bq^2 + cq^4$. Luego $q^2 | a = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{\mathrm{pt}})$.
- Además, $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{\mathrm{pt}})$ divide a $pq^4 = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C})$. Así, $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{\mathrm{pt}}) \in \{q^2, q^3, q^4, pq^2, pq^3, pq^4\}$.
- Caso $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{\mathrm{pt}}) = q^3$: la graduación universal por $U(\mathcal{C})$ tiene q^3 componentes $\mathcal{C}_g$ y cada una tiene dimensión pq. Luego, $pq = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_g) = a_g + b_g q^2 + c_g q^4$. Entonces $a_g \neq 0, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Como q divide a $a_g \Rightarrow a_g \geq q$, $\forall g \in U(\mathcal{C})$. Así, $q^3 = a = \sum_{g \in U(\mathcal{C})} a_g \geq q^3 q$. Absurdo.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría modular íntegra con $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces $\mathcal{C}$ es de tipo grupo.

Idea de la prueba:

- Sea $X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$. Como $\mathrm{FPdim}(X)^2$ divide a $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4 \Rightarrow \mathrm{FPdim}(X) = 1, q$ o q^2.
- Entonces $pq^4 = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = a + bq^2 + cq^4$. Luego $q^2 | a = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{\mathrm{pt}})$.
- Además, $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{\mathrm{pt}})$ divide a $pq^4 = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C})$. Así, $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{\mathrm{pt}}) \in \{q^2, q^3, q^4, pq^2, pq^3, pq^4\}$.
- Caso $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{\mathrm{pt}}) = q^3$: la graduación universal por $U(\mathcal{C})$ tiene q^3 componentes $\mathcal{C}_g$ y cada una tiene dimensión pq. Luego, $pq = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_g) = a_g + b_g q^2 + c_g q^4$. Entonces $a_g \neq 0, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Como q divide a $a_g \Rightarrow a_g \geq q$, $\forall g \in U(\mathcal{C})$. Así, $q^3 = a = \sum_{g \in U(\mathcal{C})} a_g \geq q^3 q$. Absurdo.

Algunas ideas de la prueba

Si $\mathcal{C}$ es una categoría modular íntegra con $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces $\mathcal{C}$ es de tipo grupo.

Idea de la prueba:

- Sea $X \in \text{Irr}(\mathcal{C})$. Como $\text{FPdim}(X)^2$ divide a $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4 \Rightarrow \text{FPdim}(X) = 1, q$ o q^2.
- Entonces $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C}) = a + bq^2 + cq^4$. Luego $q^2 | a = \text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$.
- Además, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$ divide a $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C})$. Así, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) \in \{q^2, q^3, q^4, pq^2, pq^3, pq^4\}$.
- Caso $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) = q^3$: la graduación universal por $U(\mathcal{C})$ tiene q^3 componentes $\mathcal{C}_g$ y cada una tiene dimensión pq. Luego, $pq = \text{FPdim}(\mathcal{C}_g) = a_g + b_g q^2 + c_g q^4$. Entonces $a_g \neq 0, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Como q divide a $a_g \Rightarrow a_g \geq q$, $\forall g \in U(\mathcal{C})$. Así, $q^3 = a = \sum_{g \in U(\mathcal{C})} a_g \geq q^3 q$. Absurdo.

Algunas ideas de la prueba

Si $\mathcal{C}$ es una categoría modular íntegra con $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces $\mathcal{C}$ es de tipo grupo.

Idea de la prueba:

- Sea $X \in \text{Irr}(\mathcal{C})$. Como $\text{FPdim}(X)^2$ divide a $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4 \Rightarrow \text{FPdim}(X) = 1, q$ o q^2.
- Entonces $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C}) = a + bq^2 + cq^4$. Luego $q^2 | a = \text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$.
- Además, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$ divide a $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C})$. Así, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) \in \{q^2, q^3, q^4, pq^2, pq^3, pq^4\}$.
- Caso $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) = q^3$: la graduación universal por $U(\mathcal{C})$ tiene q^3 componentes $\mathcal{C}_g$ y cada una tiene dimensión pq. Luego, $pq = \text{FPdim}(\mathcal{C}_g) = a_g + b_g q^2 + c_g q^4$. Entonces $a_g \neq 0, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Como q divide a $a_g \Rightarrow a_g \geq q$, $\forall g \in U(\mathcal{C})$. Así, $q^3 = a = \sum_{g \in U(\mathcal{C})} a_g \geq q^3 q$. Absurdo.

Algunas ideas de la prueba

Si $\mathcal{C}$ es una categoría modular íntegra con $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces $\mathcal{C}$ es de tipo grupo.

Idea de la prueba:

- Sea $X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$. Como $\mathrm{FPdim}(X)^2$ divide a $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4 \Rightarrow \mathrm{FPdim}(X) = 1, q$ o q^2.
- Entonces $pq^4 = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = a + bq^2 + cq^4$. Luego $q^2 | a = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{\mathrm{pt}})$.
- Además, $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{\mathrm{pt}})$ divide a $pq^4 = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C})$. Así, $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{\mathrm{pt}}) \in \{q^2, q^3, q^4, pq^2, pq^3, pq^4\}$.
- Caso $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{\mathrm{pt}}) = q^3$: la graduación universal por $U(\mathcal{C})$ tiene q^3 componentes $\mathcal{C}_g$ y cada una tiene dimensión pq. Luego, $pq = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_g) = a_g + b_g q^2 + c_g q^4$. Entonces $a_g \neq 0, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Como q divide a $a_g \Rightarrow a_g \geq q$, $\forall g \in U(\mathcal{C})$. Así, $q^3 = a = \sum_{g \in U(\mathcal{C})} a_g \geq q^3 q$. Absurdo.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría modular íntegra con $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces $\mathcal{C}$ es de tipo grupo.

Idea de la prueba:

- Sea $X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$. Como $\mathrm{FPdim}(X)^2$ divide a $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4 \Rightarrow \mathrm{FPdim}(X) = 1, q$ o q^2.
- Entonces $pq^4 = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = a + bq^2 + cq^4$. Luego $q^2 | a = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{\mathrm{pt}})$.
- Además, $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{\mathrm{pt}})$ divide a $pq^4 = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C})$. Así, $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{\mathrm{pt}}) \in \{q^2, q^3, q^4, pq^2, pq^3, pq^4\}$.
- Caso $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{\mathrm{pt}}) = q^3$: la graduación universal por $U(\mathcal{C})$ tiene q^3 componentes $\mathcal{C}_g$ y cada una tiene dimensión pq. Luego, $pq = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_g) = a_g + b_g q^2 + c_g q^4$. Entonces $a_g \neq 0, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Como q divide a $a_g \Rightarrow a_g \geq q$, $\forall g \in U(\mathcal{C})$. Así, $q^3 = a = \sum_{g \in U(\mathcal{C})} a_g \geq q^3 q$. Absurdo.

Algunas ideas de la prueba

Si $\mathcal{C}$ es una categoría modular íntegra con $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces $\mathcal{C}$ es de tipo grupo.

Idea de la prueba:

- Sea $X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$. Como $\mathrm{FPdim}(X)^2$ divide a $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4 \Rightarrow \mathrm{FPdim}(X) = 1, q$ o q^2.
- Entonces $pq^4 = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = a + bq^2 + cq^4$. Luego $q^2 | a = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{\mathrm{pt}})$.
- Además, $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{\mathrm{pt}})$ divide a $pq^4 = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C})$. Así, $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{\mathrm{pt}}) \in \{q^2, q^3, q^4, pq^2, pq^3, pq^4\}$.
- Caso $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{\mathrm{pt}}) = q^3$: la graduación universal por $U(\mathcal{C})$ tiene q^3 componentes $\mathcal{C}_g$ y cada una tiene dimensión pq. Luego, $pq = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_g) = a_g + b_g q^2 + c_g q^4$. Entonces $a_g \neq 0, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Como q divide a $a_g \Rightarrow a_g \geq q$, $\forall g \in U(\mathcal{C})$. Así, $q^3 = a = \sum_{g \in U(\mathcal{C})} a_g \geq q^3 q$. Absurdo.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría modular íntegra con $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces $\mathcal{C}$ es de tipo grupo.

Idea de la prueba:

- Sea $X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$. Como $\mathrm{FPdim}(X)^2$ divide a $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4 \Rightarrow \mathrm{FPdim}(X) = 1, q$ o q^2.
- Entonces $pq^4 = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = a + bq^2 + cq^4$. Luego $q^2 | a = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{\mathrm{pt}})$.
- Además, $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{\mathrm{pt}})$ divide a $pq^4 = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C})$. Así, $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{\mathrm{pt}}) \in \{q^2, q^3, q^4, pq^2, pq^3, pq^4\}$.
- Caso $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{\mathrm{pt}}) = q^3$: la graduación universal por $U(\mathcal{C})$ tiene q^3 componentes $\mathcal{C}_g$ y cada una tiene dimensión pq. Luego, $pq = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_g) = a_g + b_g q^2 + c_g q^4$. Entonces $a_g \neq 0, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Como q divide a $a_g \Rightarrow a_g \geq q$, $\forall g \in U(\mathcal{C})$. Así, $q^3 = a = \sum_{g \in U(\mathcal{C})} a_g \geq q^3 q$. Absurdo.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría modular íntegra con $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces $\mathcal{C}$ es de tipo grupo.

Idea de la prueba:

- Sea $X \in \text{Irr}(\mathcal{C})$. Como $\text{FPdim}(X)^2$ divide a $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4 \Rightarrow \text{FPdim}(X) = 1, q$ o q^2.
- Entonces $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C}) = a + bq^2 + cq^4$. Luego $q^2 | a = \text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$.
- Además, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$ divide a $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C})$. Así, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) \in \{q^2, q^3, q^4, pq^2, pq^3, pq^4\}$.
- Caso $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) = q^3$: la graduación universal por $U(\mathcal{C})$ tiene q^3 componentes $\mathcal{C}_g$ y cada una tiene dimensión pq. Luego, $pq = \text{FPdim}(\mathcal{C}_g) = a_g + b_g q^2 + c_g q^4$. Entonces $a_g \neq 0, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Como q divide a $a_g \Rightarrow a_g \geq q$, $\forall g \in U(\mathcal{C})$. Así, $q^3 = a = \sum_{g \in U(\mathcal{C})} a_g \geq q^3 q$. Absurdo.

Algunas ideas de la prueba

Si $\mathcal{C}$ es una categoría modular íntegra con $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces $\mathcal{C}$ es de tipo grupo.

Idea de la prueba:

- Sea $X \in \text{Irr}(\mathcal{C})$. Como $\text{FPdim}(X)^2$ divide a $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4 \Rightarrow \text{FPdim}(X) = 1, q$ o q^2.
- Entonces $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C}) = a + bq^2 + cq^4$. Luego $q^2 | a = \text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$.
- Además, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$ divide a $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C})$. Así, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) \in \{q^2, q^3, q^4, pq^2, pq^3, pq^4\}$.
- Caso $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) = q^3$: la graduación universal por $U(\mathcal{C})$ tiene q^3 componentes $\mathcal{C}_g$ y cada una tiene dimensión pq. Luego, $pq = \text{FPdim}(\mathcal{C}_g) = a_g + b_g q^2 + c_g q^4$. Entonces $a_g \neq 0, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Como q divide a $a_g \Rightarrow a_g \geq q$, $\forall g \in U(\mathcal{C})$. Así, $q^3 = a = \sum_{g \in U(\mathcal{C})} a_g \geq q^3 q$. Absurdo.

Algunas ideas de la prueba

Si $\mathcal{C}$ es una categoría modular íntegra con $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces $\mathcal{C}$ es de tipo grupo.

Idea de la prueba:

- Sea $X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$. Como $\mathrm{FPdim}(X)^2$ divide a $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4 \Rightarrow \mathrm{FPdim}(X) = 1, q$ o q^2.
- Entonces $pq^4 = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = a + bq^2 + cq^4$. Luego $q^2 | a = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{\mathrm{pt}})$.
- Además, $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{\mathrm{pt}})$ divide a $pq^4 = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C})$. Así, $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{\mathrm{pt}}) \in \{q^2, q^3, q^4, pq^2, pq^3, pq^4\}$.
- Caso $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{\mathrm{pt}}) = q^3$: la graduación universal por $U(\mathcal{C})$ tiene q^3 componentes $\mathcal{C}_g$ y cada una tiene dimensión pq. Luego, $pq = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_g) = a_g + b_g q^2 + c_g q^4$. Entonces $a_g \neq 0, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Como q divide a $a_g \Rightarrow a_g \geq q$, $\forall g \in U(\mathcal{C})$. Así, $q^3 = a = \sum_{g \in U(\mathcal{C})} a_g \geq q^3 q$. Absurdo.

Referencias I

V. Drinfeld, S. Gelaki, D. Nikshych, V. Ostrik.
Group-theoretical properties of nilpotent modular categories.
Preprint arXiv:0704.0195, 2007.

P. Etingof, S. Gelaki, V. Ostrik.
Classification of fusion categories of dimension pq.
Int. Math. Res. Not., **57**:3041–3056, 2004.

P. Etingof, D. Nikshych, V. Ostrik.
On fusion categories.
Annals of Math., **162**:581–642, 2005.

P. Etingof, D. Nikshych, V. Ostrik.
Weakly group-theoretical and solvable fusion categories.
Adv. Math., **226**:176–205, 2011.

S. Gelaki, D. Nikshych.
Nilpotent fusion categories.
Adv. Math., **217**:1053-1071, 2008.

S. Gelaki, D. Naidu, D. Nikshych.
Centers of graded fusion categories.
Algebra Number Theory, **3**: 959-990, 2009.

D. Naidu, E. Rowell.
A finiteness property for braided fusion categories.
Algebr. Represent. Theory, **14**, No. 5: 837–855, 2011.

Referencias III

P. Bruillard, C. Galindo, S.-M. Hong, Y. Kashina, D. Naidu, S. Natale, J. Plavnik, E. Rowell.
Classification of integral modular categories of Frobenius-Perron dimension pq^4 and p^2q^2.
To appear in *Can. Math. Bull.*. Preprint arXiv:1303.4748, 2013.